

אלגברה לינארית

מספר יחידות לימוד

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: ארבע שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון	64	נקודות
פרק שני	36	נקודות
סה"כ	100	נקודות

ג. חומר עזר מותר לשימוש: כל חומר עזר כתוב בכתב יד או מודפס על נייר.

ד. הוראות מיוחדות:

את התשובות לכל השאלות יש לרשום אך ורק על-גבי דף התשובות שבנספח.

הוראות למשיגי:

בתום הבחינה יש לוודא שהנבחנים הדביקו את מדבקת הנבחן שלהם במקום המיועד לכך בנספח וצירפו את הנספח למחברת הבחינה.

בשאלון זה 24 עמודים ועמוד אחד של נספח.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר, אך מכוונות הן לנבחנות והן לנבחנים.

בהצלחה!

השאלות

פרק ראשון (64 נקודות)

ענה על ארבע מבין השאלות 1-5 (לכל שאלה – 16 נקודות).
 בכל אחת מן השאלות 1-5 נתונים סעיפים, שאינם תלויים זה בזה. בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה, והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.
 בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.
 הדבק את מדבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך בנספח, והדק את הנספח למחברת הבחינה.

שאלה 1

הסעיפים א'-ו' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מערכת המשוואות: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a-t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a(3-a) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix} \quad \text{עבור:}$$

א. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור a שווה ל-1:

1. למערכת הנתונה אין אף פתרון כאשר t שונה מ- $(-a)$ בלבד.
2. למערכת הנתונה יש פתרון יחיד כאשר t שונה מ- $(-a)$.
3. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות לכל ערך של t .
4. למערכת הנתונה אין אף פתרון לכל ערך של t .

ב. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור a שווה ל-3:

1. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות לכל ערך של t .
2. למערכת הנתונה אין אף פתרון לכל ערך של t .
3. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות כאשר t שווה ל- (-3) בלבד.
4. למערכת הנתונה אין אף פתרון כאשר t שווה ל- (-3) בלבד.

- ג. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור a שווה ל-0:
1. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות לכל ערך של t .
 2. למערכת הנתונה אין אף פתרון לכל ערך של t .
 3. למערכת הנתונה אין אף פתרון כאשר t שונה מ-0 בלבד.
 4. למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות כאשר t שונה מ-0 בלבד.
- ד. עבור אילו ערכים של a ו- t יש פתרון יחיד למערכת הנתונה?
1. עבור a שונה מ-3, מ-0, מ-1 בלבד, ועבור t שונה מ-(-a)
 2. עבור a שונה מ-3, מ-0, מ-1 בלבד, ועבור כל ערך של t
 3. עבור a שונה מ-1 בלבד, ועבור כל ערך של t
 4. לא קיים ערך כזה של a ושל t שעבורם יש פתרון יחיד למערכת הנתונה
- ה. עבור אילו ערכים של a ו- t יש אינסוף פתרונות למערכת הנתונה?
1. עבור a שווה ל-3 ו- t שווה ל-(-3), או עבור a שווה ל-0 ו- t שווה ל-0
 2. עבור a שווה ל-3 ו- t שונה מ-(-3), או עבור a שווה ל-0 ו- t שונה מ-0, או עבור a שווה ל-1, ולכל ערך של t
 3. עבור a שווה ל-3 ו- t שווה ל-(-3) בלבד
 4. לא קיים t שעבורו למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות
- ו. עבור a שווה 0, ו- t שווה ל-0, מה יהיה ערכו של x ?
1. -1
 2. -3
 3. k כאשר $y = k$
 4. לא ניתן למצוא את ערכו של x .

שאלה 2

סעיפים א' ו-ב' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונות המטריצה: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ומערכת המשוואות: $B\underline{x} = \underline{b}$

עבור: $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

הנח כי המטריצה A הפיכה, והמטריצה ההופכית שלה מסומנת ב- A^{-1} .

א. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור $w = t$:

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} - t \cdot A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} - A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ב. הנח כי המטריצה ההופכית של A היא: $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & a & 1 \\ -8 & b & -a \\ 12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ מהו ערכם של a ושל b ?

1. $a = 2$ $b = 4$

2. $a = \frac{5}{6}$ $b = \frac{44}{18}$

3. $a = \frac{2}{3}$ $b = \frac{4}{3}$

4. $a = 0$ $b = 1$

סעיפים ג' ו-ד' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונה מטריצה סימטרית $A = \begin{pmatrix} a & -1 & * \\ * & b & 4 \\ 0 & * & c \end{pmatrix}$, וההופכית שלה היא: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & -3 & * \\ * & -3 & 1 \\ 1 & * & z \end{pmatrix}$

האיברים המסומנים ב-* במטריצה מציינים שערך האיבר לא נתון.

ג. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור $a = 1$:

1. $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 13 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$

4. לא ניתן למצוא את הערכים של b, c, x, z כיוון שחסרים נתונים.

ד. נתון $a = 0$. קבע עבור אילו ערכים של b ו- c המטריצה הנתונה תהיה הפיכה.

1. עבור כל מספר ממשי אפשרי

2. עבור b כלשהו ו- c שונה מ-0

3. עבור b שווה ל-0 בלבד ו- c שווה ל-0

4. עבור b שווה ל-0 בלבד ו- c שונה מ-0

ה. נתונות המטריצות:

$$B = \begin{pmatrix} 5a_3 & 5a_2 & 5a_1 \\ 2b_3 & 2b_2 & 2b_1 \\ -c_3 & -c_2 & -c_1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

כמו-כן, נתון כי $\det(A) = \frac{1}{5}$. מהי הדטרמיננטה של המטריצה B?

1. 2

2. -2

3. 200

4. -200

שאלה 3

כל הסעיפים בשאלה זו מתייחסים למטריצה הזאת: $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$

א. מהי הדטרמיננטה של A ?

1. $k + 2k^2$

2. $2k^3$

3. k^3

4. 0

ב. עבור איזה ערך של k השונה מאפס מתקיים $A \cdot A^t = I$?

1. ± 1

2. לא קיים k כזה.

3. 1

4. לכל k

ג. עבור איזה ערך של k מתקיים $A \cdot A^t = -A$?

1. 0, 1

2. -1

3. לא קיים k כזה.

4. 0

ד. המטריצה $A^2 + 2A$ תהיה מטריצה אלכסונית כאשר:

1. $k = 1$

2. כל ערך של k יהיה שונה מ-0.

3. כל ערך של k יהיה שונה מ-1.

4. $k = 0$ או $k = -1$

ה. נתון $k = 1$. קבע עבור איזה ערך של m מספר שלם חיובי כלשהו תהיה המטריצה A^m מטריצה הפיכה.

1. לא קיים m כזה.

2. $m = 1$

3. m שונה מ-1.

4. לכל m

שאלה 4

הסעיפים א' ו-ב' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$T \underline{v} = A \cdot \underline{v} \quad \text{מתקיים} \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \quad \text{כלומר, לכל} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{מיוצגת על-ידי המטריצה}$$

א. קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא נכונה:

1. $\dim(\text{Ker}T) = 1$ כי לא קיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $T(\underline{v}) = \underline{0}$.

2. $\dim(\text{Im}T) = 3$ כי העמודות c_3, c_2, c_1 הן בסיס לתמונה של T .

3. $\dim(\text{Im}T) = 4, \dim \text{Ker}T = 0$ ו- T היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית ועל.

4. $\dim \text{Ker}T = \dim(\text{Im}T) = 2$.

ב. יהי n מספר שלם חיובי. קבע איזו מבין הטענות שלהלן היא נכונה:

1. ארבע השורות של המטריצה A^{10} הן בלתי תלויות לינארית.

2. לא קיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $A^{10} \cdot \underline{v} = \underline{0}$.

3. ארבע העמודות של המטריצה A^{10} הן בלתי תלויות לינארית.

4. קיימים שני וקטורים שונים $\underline{v} \neq \underline{w}$, כך ש- $A \cdot \underline{v} = A \cdot \underline{w}$.

הסעיפים ג', ד' ו-ה' מתייחסים לטרנספורמציה T , כאשר הטרנספורמציה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

מיוצגת על-ידי המטריצה $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. כלומר, לכל $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ מתקיים $T(\underline{v}) = A \cdot \underline{v}$.

ג. מהם הערכים העצמיים של הטרנספורמציה T ?

1. 4 בלבד

2. 4 ו-0 בלבד

3. 2 ו-4 בלבד

4. 2 בלבד

ד. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. T אינה טרנספורמציה חד-חד-ערכית ולא על.

2. $\dim(\text{Im}T) = \dim(\text{Ker}T)$.

3. T היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית ולא על.

4. T היא טרנספורמציה חד-חד-ערכית ועל.

ה. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. קיימים שלושה וקטורים שהם בלתי תלויים לינארית $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ כך ש- $T(\underline{u}_1) = 4\underline{u}_1, T(\underline{u}_2) = 2\underline{u}_2, T(\underline{u}_3) = \underline{0}$.

2. קיימים שני וקטורים שהם בלתי תלויים לינארית $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ כך ש- $T(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = T(\underline{v}_2) = 2\underline{v}_2$.

3. קיימים שני וקטורים שהם בלתי תלויים לינארית $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ כך ש- $T(\underline{w}_2) = 2\underline{w}_2$ ו- $T(\underline{w}_1 - \underline{w}_2) = 4\underline{w}_1 - 2\underline{w}_2$.

4. קיים בסיס B של \mathbb{R}^3 המורכב מווקטורים עצמיים של הטרנספורמציה T .

שאלה 5

סעיפים א', ב' ו-ג' מתייחסים לנתונים שלהלן:

נתונים ארבעה וקטורים v_1, v_2, v_3, v_4 בלתי תלויים לינארית במרחב \mathbb{R}^4 . נוסף על כך, נתונים שלושה וקטורים x, y, z , שתלויים לינארית ב- \mathbb{R}^4 , אשר אפשר לכתוב אותם כקומבינציה לינארית של v_1, v_2, v_3, v_4 בצורה הזאת:

$$\begin{cases} x = v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \\ y = -v_1 - v_2 - v_3 - v_4 \\ z = v_1 + v_2 - 5v_3 - 5v_4 \end{cases}$$

א. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. $\{x, y, z\}$ הם בלתי תלויים לינארית.
2. תת-המרחב הנפרש על-ידי $\{x, y, z\}$ הוא בעל ממד 3.
3. קיים וקטור w כך ש- $\{x, y, z, w\}$ הוא בסיס ל- \mathbb{R}^4 .
4. $\{x, y, z\}$ תלויים לינארית ואינם בסיס לתת-המרחב הנפרש על-ידי $\{x, y, z\}$.

ב. הממד של תת-המרחב הנפרש על-ידי $\{x, y, z, x+y+z\}$ שווה ל:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

ג. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. $\{x, x+y, x+y+z\}$ הם בלתי תלויים לינארית.
2. תת-המרחב הנפרש על-ידי $\{-x, -x-y, -x-y-z\}$ הוא בעל ממד 2.
3. קיים וקטור w , כך ש- $\{x, y, z, w\}$ הוא בסיס ל- \mathbb{R}^4 .
4. $\{x, x+2y, x+2y+3z, x+y+z\}$ הוא בסיס ל- \mathbb{R}^4 .

ד. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. הווקטורים $\{\underline{x}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ הם בלתי תלויים לינארית ופורשים מרחב בעל 2.

2. לכל וקטור \underline{w} במרחב \mathbf{R}^4 הקבוצה $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ בסיס ל- \mathbf{R}^4 .

3. הווקטורים $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ מהווים בסיס למרחב \mathbf{R}^4 .

4. הווקטורים $\{\underline{x}, \underline{y}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ פורשים תת-מרחב בעל ממד 4.

ה. יהי \underline{w} וקטור ניצב לכל אחד מן הווקטורים $\underline{v}_1, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 + \underline{v}_4$.

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. $\underline{w} \neq \underline{0}$

2. $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ הוא בסיס ל- \mathbf{R}^4 .

3. קיימים ארבעה סקלרים: a_1, a_2, a_3, a_4 **שלא כולם** שווים לאפס, כך

$$\underline{w} = a_1 \underline{x} + a_2 \underline{y} + a_3 \underline{z} + a_4 \underline{w} = \underline{0}$$

4. $\{\underline{w}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ פורשים את כל המרחב \mathbf{R}^4 .

פרק שני (36 נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8 (לכל שאלה – 18 נקודות).
 בכל אחת מן השאלות 6-8 נתונים שבעה סעיפים, א'-ז', שאינם תלויים זה בזה.
 בכל סעיף נתונות ארבע תשובות, שרק אחת מהן נכונה. בכל סעיף בחר את התשובה הנכונה והקף בעיגול את הספרה המייצגת אותה בדף התשובות שבנספח.
 בשאלות שבחרת לענות עליהן, ענה על כל הסעיפים.

שאלה 6

א. בבעיית תובלה ישנם שלושה מקורות וארבעה יעדים. העלויות ליחידה מכל מקור לכל יעד נתונות בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4	
1	10	22	20	30	200
2	20	17	18	15	300
3	15	32	24	22	350
ביקוש	100	180	270	150	

כדי לקבל טבלת עלויות וביקושים מתאימה:

1. יש להוסיף יעד דמה עם ביקוש של 150.
2. יש להוסיף מקור דמה עם היצע של 150.
3. אין צורך להוסיף לא מקור דמה ולא יעד דמה.
4. אי-אפשר לאזן את הבעיה על-ידי הוספת יעד דמה או מקור דמה.

ב. נתונה בעיית תובלה שבה שלושה מקורות ושלושה יעדים. ההיצעים והביקושים נתונים בטבלה שלהלן. כמו כן, לגבי פתרון בסיסי אפשרי מסוים לבעיה, ידוע כי המשתנים הבסיסיים הם: $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}$ (המסומנים באליפסה).

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	○			100
2	○	○		200
3		○	○	150
ביקוש	180	170	100	

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור הבעיה הנתונה:

1. לפי שיטת הפינה הצפונית-מערבית המשתנים x_{22}, x_{32} מקבלים את הערכים האלה:
 $x_{22} = 100, x_{32} = 70$.
2. לפי שיטת הפינה הצפונית-מערבית המשתנים x_{22}, x_{32} מקבלים את הערכים האלה:
 $x_{22} = 120, x_{32} = 50$.
3. לפי שיטת הפינה הצפונית-מערבית מתקבלים משתנים בסיסיים אחרים, ולא כפי שנתון בפתרון הבסיסי שלעיל.
4. אי-אפשר לדעת מהו הפתרון הבסיסי האפשרי לפי שיטת הפינה הצפונית-מערבית כיוון שלא נתונים מחירי התובלה.

ג. בטבלה שלהלן נתון פתרון לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים			היצע	u_i
	1	2	3		
1	5 150	8	7	150	0
2	4 70	7	3 130	200	-1
3	8	10 120	6 30	150	2
ביקוש	220	120	160		
v_j	5	8	4		

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור הפתרון הנתון:

1. הפתרון אינו פתרון בסיסי אפשרי.
2. הפתרון הוא פתרון אופטימלי יחיד.
3. הפתרון הוא פתרון אופטימלי לא יחיד.
4. הפתרון אינו פתרון אפשרי.

ד. בטבלה הבאה נתון פתרון לבעיית תובלה:

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	10	3 90	2	90
2	4 60	8 30	6 10	100
3	5	C	6 70	70
ביקוש	60	120	80	

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון עבור הפתרון הנתון:

1. עבור $C = 8$ הפתרון הנתון הוא אופטימלי ויחיד.
 2. עבור כל ערך של C , כך ש- $C < 8$, הפתרון הנתון הוא אופטימלי.
 3. עבור כל ערך של C , הפתרון הנתון אפשרי ובסיסי.
 4. עבור כל ערך של C , כך ש- $C > 8$, הפתרון הנתון הוא אופטימלי, אך לא יחיד.
- ה. נתונה בעיית תובלה. נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים, וכן הערכים של $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3$, מוצגים בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים			היצע	u_i
	1	2	3		
1	4	5	6	100	5
2	3	10	3	150	9
3	7	8	2	250	8
ביקוש	180	170	150		
v_j	-6	0	-6		

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון לבעיה הנתונה:

1. הפתרון שנובע מהטבלה הנתונה אינו פתרון בסיסי אפשרי.
2. הפתרון שנובע מהטבלה הנתונה הוא פתרון אופטימלי יחיד, וערכי המשתנים הם: $x_{12} = 100, x_{21} = 180, x_{23} = 70, x_{32} = 70, x_{33} = 80$.
3. הפתרון שנובע מהטבלה הנתונה הוא פתרון בסיסי אפשרי, אך אינו אופטימלי.
4. הפתרון שנובע מהטבלה הנתונה הוא פתרון אופטימלי, אך אינו יחיד.

1. נתונה בעיית התובלה. ידוע שיעד 4 הוא יעד דמה. נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים, מוצגים בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים				היצע
	1	2	3	4 (דמה)	
1	6	14	12	c	50
2	13	a	b	20	70
3	20	11	15	22	80
4	14	18	19	10	100
ביקוש	120	90	60	30	

להלן שתי טענות:

(I) אם ממקור 2 **אסור** לספק ליעדים 2 ו-3, אזי מחירי התובלה a , b צריכים להיות:

$$a = M, b = M \text{ (יש להתייחס ל-} M \text{ כאל מספר גדול מאוד).}$$

(II) אם **אסור** שיישאר מלאי במקור 1, אזי מחיר התובלה c צריך להיות $c = M$

(יש להתייחס ל- M כאל מספר גדול מאוד).

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. שתי הטענות נכונות.

2. שתי הטענות אינן נכונות.

3. טענה (I) נכונה ואילו טענה (II) אינה נכונה.

4. טענה (I) אינה נכונה ואילו טענה (II) נכונה.

ז. נתונה בעיית תובלה.

נתוני הבעיה, כולל מחירי התובלה של יחידת מוצר מהמקורות ליעדים, מוצגים בטבלה שלהלן:

מקורות	יעדים			היצע
	1	2	3	
1	20	30	24	200
2	10	15	16	200
3	12	a	17	50
ביקוש	80	100	270	

מפעילים את שיטת הקנסות של ווגל למציאת פתרון בסיסי התחלתי אפשרי.

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים **אינו** נכון עבור הבעיה הנתונה:

1. אם $a = 5$, אזי המשתנה הבסיסי הראשון שייבחר יהיה x_{22} וערכו יהיה 100.
2. אם $a = 11$, אזי המשתנה הבסיסי הראשון שייבחר יהיה x_{21} וערכו יהיה 80.
3. אם $a = 9$, אזי המשתנה הבסיסי הראשון שייבחר יהיה x_{32} וערכו יהיה 50.
4. אם $a = 14$, אזי המשתנה הבסיסי הראשון שייבחר יהיה x_{21} וערכו יהיה 80.

שאלה 7

סעיפים א' – ד' מתייחסים לאיור א'.

לפניך בעיה בתכנון לינארי:

$$\max \{z = ax_1 + bx_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

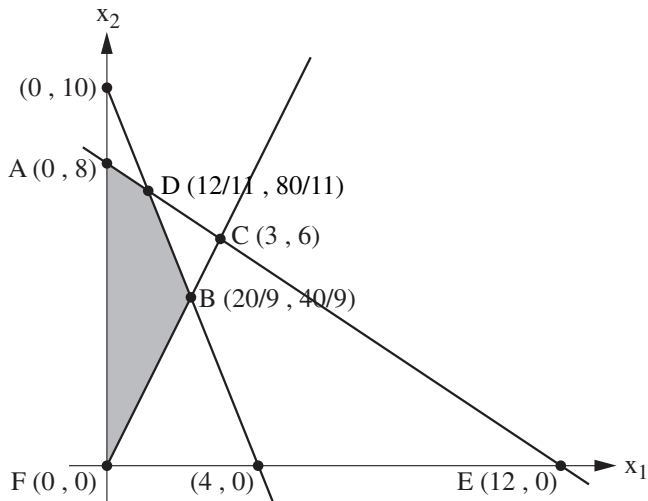
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20$$

$$2x_1 - x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

המשך בעמוד 17

תחום הפתרון האפשרי עבור הבעיה הנתונה מתואר באיור א' לשאלה 7 (התחום האפור).



איור א' לשאלה 7

א. נתון כי $b = 6$. עבור אילו ערכים של a הפתרון האופטימלי של הבעיה הנתונה נמצא בקדקוד המסומן A באיור?

1. לכל $a \geq 15$
2. לכל $a > 4$
3. לכל $a < 15$
4. לכל $a \leq 4$

ב. נתון כי $b = 6$. עבור אילו ערכים של a הפתרון האופטימלי של הבעיה הנתונה נמצא בקדקוד המסומן B באיור?

1. לכל $a \geq 0$
2. לכל $12 < a < 15$
3. לכל $a \geq 15$
4. לכל $a \leq 4$

ג. נתון כי $a = 1, b = 1$. איזה מבין השינויים הבאים יגרום לכך שהפתרון האופטימלי יתקבל בנקודה C שבאזור?

1. אם יתווסף האילוץ: $x_1 + x_2 \leq 10$

2. אם יתווסף האילוץ: $x_1 \geq 3$

3. אם יתבטל אילוץ 2.

4. אם יתבטל אילוץ 1.

ד. נתון כי $a = 3, b = 7$. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. הפתרון האופטימלי לבעיה הדואלית הוא: $y_3 = -\frac{29}{9}$ $y_2 = \frac{17}{9}$ $y_1 = 0$, וערכה של פונקציית המטרה עבור הבעיה הדואלית הוא 56.

2. הפתרון האופטימלי לבעיה הדואלית הוא: $y_3 = 0$ $y_2 = 0$ $y_1 = \frac{7}{3}$, וערכה של פונקציית המטרה עבור הבעיה הדואלית הוא 56.

3. אי-אפשר לדעת מהו הפתרון של הבעיה הדואלית על בסיס הנתונים האלה, אך ניתן לדעת שערך פונקציית המטרה עבור הבעיה הדואלית הוא 56.

4. על סמך הנתונים אי-אפשר לדעת מהו הפתרון של הבעיה הדואלית ומהו ערך פונקציית המטרה שלה.

ה. לפניך בעיה בתכנון לינארי:

$$\max \{z = 4x_1 + 2x_2 + x_3\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

$$x_2 + x_3 \geq 8$$

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

ידוע שבפתרון האופטימלי של הבעיה הנתונה אילוצים 1 ו-2 מתקיימים כשוויון ו- $x_3 = 0$.
 נוסף על-כך, נתונה בעיית תכנון לינארי אחרת המכילה שני משתני החלטה בלבד:

$$\max \{z = 4x_1 + x_2\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 12$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. בפתרון האופטימלי של שתי הבעיות הנתונות ערכי המשתנים x_1 ו- x_2 זהים, וערכי פונקציית המטרה שלהן שווים.
2. בפתרון האופטימלי של שתי הבעיות הנתונות ערכי המשתנים x_1 ו- x_2 זהים, אך ערכי פונקציית המטרה שלהן שונים.
3. על סמך הנתונים האלה, אי-אפשר לדעת אם בשתי הבעיות הנתונות ערכי המשתנים x_1 ו- x_2 זהים בפתרון האופטימלי.
4. לא ייתכן שהפתרון האופטימלי של שתי הבעיות הנתונות ייתן ערך זהה למשתנים x_1 ו- x_2 .

סעיפים ו'-ז' מתייחסים לבעיית התכנון הלינארי הפרימלית שלהלן:

$$\max \{z = ax_1 + bx_2\}$$

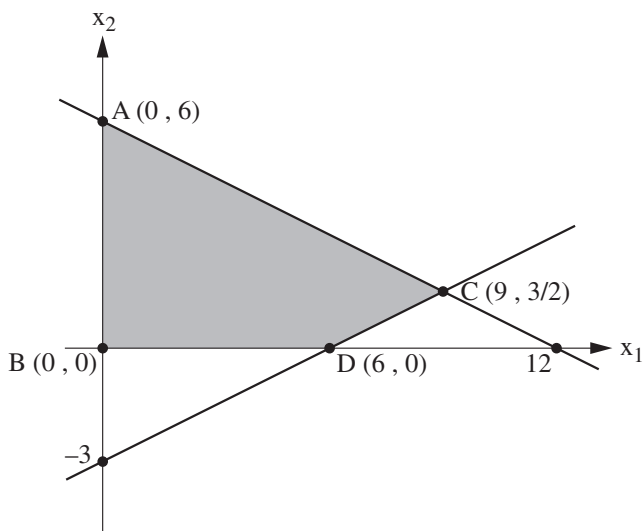
בכפוף לאילוצים האלה:

$$x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

התחום האפשרי עבור הבעיה הנתונה מתואר באיור ב' לשאלה 7.



איור ב' לשאלה 7

1. קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. עבור $b = 3$ ו- $a = 6$ אין לבעיה הנתונה אינסוף פתרונות אופטימליים.
 2. עבור $b = 14$ ו- $a = 7$ אין לבעיה הנתונה אינסוף פתרונות אופטימליים.
 3. עבור $b = 10$ ו- $a = -5$ אין לבעיה הנתונה אינסוף פתרונות אופטימליים.
 4. עבור $b = 8$ ו- $a = 4$ אין לבעיה הנתונה אינסוף פתרונות אופטימליים.
2. נתון כי: $a = 10, b = 25$, ובבעיה הפרימלית המקורית הנתונה משנים רק את האילוץ הראשון, ועתה הוא: $x_1 + 2x_2 \geq 12$.
- לאחר השינוי, קבע איזה מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון:

1. תחום הפתרונות האפשריים של הבעיה הדואלית לבעיה הפרימלית החדשה הוא תחום ריק.
2. הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית החדשה זהה לפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית הנתונה.
3. תחום הפתרונות האפשריים של הבעיה הפרימלית החדשה הוא תחום ריק.
4. לבעיה הפרימלית החדשה יש אינסוף פתרונות אופטימליים.

שאלה 8

סעיפים א'–ד' מתייחסים לבעיה הפרימלית שלהלן:

$$\max \{z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

1. $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0$

2. $3x_1 + 4x_2 \leq 24$

3. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

לבעיה הנתונה מוסיפים שלושה משתני סרק: x_4, x_5, x_6 , לאילוצים 1, 2, 3, בהתאמה, ופותרים אותה בשיטת הסימפלקס.

יהי y_i המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ הפרימלי i לכל $1 \leq i \leq 3$.

לאחר כמה איטרציות התקבלה טבלת סימפלקס המוצגת בטבלה א'.

משתני בסיס	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	אגף ימין
Z	1	5	?	-15	0	5	0	?
?	0	1.75	?	2	1	0.25	0	6
?	0	0.75	?	0	0	0.25	0	6
?	0	0.25	?	1	0	-0.25	1	4

טבלה א'

א. לפי טבלה א', אילו משתנים נמצאים בשלב זה בבסיס ומהו ערכם?

1. $x_2 = 6 ; x_4 = 6 ; x_6 = 4$

2. $x_1 = 6 ; x_3 = 6 ; x_5 = 4$

3. $x_1 = 6 ; x_2 = 6 ; x_3 = 4$

4. $x_4 = 6 ; x_5 = 6 ; x_6 = 4$

ב. לפי טבלה א', אילו אילוצים של הבעיה הפרימלית **לא** מתקיימים כשוויון בשלב הזה?

1. כל האילוצים מתקיימים כשוויון.

2. אילוצים 1 ו-3.

3. אילוץ 2.

4. אי-אפשר לדעת על-פי הטבלה הזאת.

ג. בשלב המוצג בטבלה א', אילו משתנים בבעיה **הדואלית** של הבעיה הפרימלית הנתונה הם חיוביים?

1. כולם חיוביים.

2. רק y_1 חיובי והיתר שווים ל-0.

3. רק y_2 חיובי והיתר שווים ל-0.

4. אי-אפשר לדעת זאת על-פי טבלת הסימפלקס הנתונה.

ד. להלן שתי טענות לגבי האיטרציה **הבאה** בשיטת הסימפלקס:

I. המשתנה שייכנס לבסיס הוא x_3 .

II. המשתנה שייצא מהבסיס הוא x_4 .

איזה היגד מבין ההיגדים הבאים הוא נכון?

1. שתי הטענות נכונות.

2. רק טענה I נכונה.

3. רק טענה II נכונה.

4. שתי הטענות אינן נכונות.

סעיפים ה'–ז' מתייחסים לבעיה הפרימלית שלהלן:

$$\max \{z = 60x_1 + 50x_2 + ax_3\}$$

בכפוף לאילוצים האלה:

1. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 20$

2. $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

לבעיה הנתונה מוסיפים משתני סרק: x_4, x_5 לאילוצים 1, 2 בהתאמה, ופותרים אותה בשיטת הסימפלקס. יהי y_i המשתנה הדואלי המתאים לאילוץ הפרימלי i לכל $1 \leq i \leq 3$.

טבלה ב' שלפניך היא הטבלה הסופית עבור הבעיה הנתונה:

משתני בסיס	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	אגף ימין
z	1	0	0	$80 - a$	10	b	?
?	0	0	1	1	0.5	-0.5	5
?	0	1	0	0.5	-0.25	0.75	2.5

טבלה ב'

ה. ידוע כי בטבלה הזאת: $b > 0$. עבור $a = 30$ הפתרון האופטימלי של הבעיה הפרימלית הוא:

1. $x_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = 2.5 \quad ; \quad x_3 = 0$

2. $x_1 = 2.5 \quad ; \quad x_2 = 5 \quad ; \quad x_3 = 0$

3. $x_1 = 10 \quad ; \quad x_2 = 20 \quad ; \quad x_3 = 0$

4. $x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = 50$

1. הפתרון האופטימלי של הבעיה **הדואלית**, עבור $a = 30$, הוא:

1. $y_1 = 0$; $y_2 = 0$

2. $y_1 = 10$; $y_2 = 22$

3. $y_1 = 10$; $y_2 = 20$

4. אי-אפשר לדעת מהו הפתרון האופטימלי על-פי טבלה ב'.

2. איזה היגד מבין ההיגדים הבאים הוא ההיגד הנכון?

1. אם $a = 80$, אזי יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה הפרימלית.

2. אם $b = 0$, אזי יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה הדואלית.

3. אם $a = 80$, אזי יש אינסוף פתרונות אופטימליים לבעיה הדואלית.

4. אם $b = 0$, אזי לבעיה הפרימלית אין פתרון.

בהצלחה!

הזבק את מזבקת הנבחן שלך במקום המיועד לכך, והדק את הדף הזה אל מחברת הבחינה שלך.

הקף בעיגול את הספרה המייצגת את התשובה הנכונה לכל סעיף.

שאלה 2

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1

שאלה 1

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1
- סעיף ו 4 3 2 1

שאלה 4

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1

שאלה 3

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1

שאלה 5

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1

שאלה 7

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1
- סעיף ו 4 3 2 1
- סעיף ז 4 3 2 1

שאלה 6

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1
- סעיף ו 4 3 2 1
- סעיף ז 4 3 2 1

שאלה 8

- סעיף א 4 3 2 1
- סעיף ב 4 3 2 1
- סעיף ג 4 3 2 1
- סעיף ד 4 3 2 1
- סעיף ה 4 3 2 1
- סעיף ו 4 3 2 1
- סעיף ז 4 3 2 1